



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Mechanika i wytrzymałość materiałów

Wykład Nr 5

Rozciąganie i ściskanie

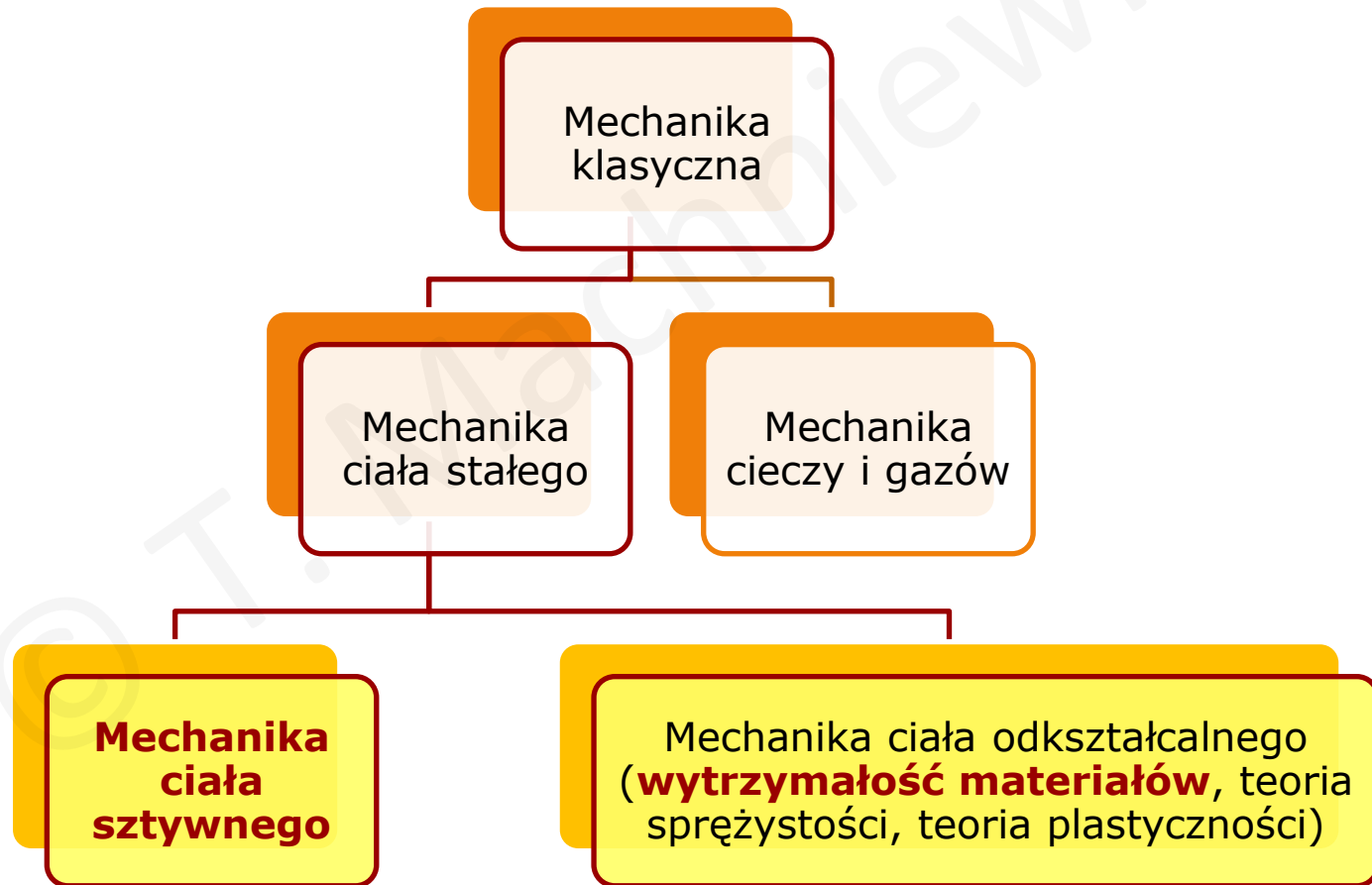
Wytrzymałość materiałów: podstawowe pojęcia, założenia, rodzaje odkształceń, typy elementów konstrukcyjnych, kryteria oceny obiektów, siły wewnętrzne i naprężenia, zasada de Saint-Venanta, monotoniczna próba rozciągania, efekt Bauschingera, rozciąganie-ściskanie: warunek bezpieczeństwa, warunek sztywności, odkształcenia wzdłużne a poprzeczne, liczba Poissona

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji

Dr hab. inż. Tomasz Machniewicz

5.1. Wytrzymałość Materiałów – podstawowe pojęcia

Wytrzymałość Materiałów – nauka (dział mechaniki) zajmująca się badaniem zjawisk występujących w ciałach rzeczywistych, tj. w ciałach które odkształcają się pod wpływem przyłożonych obciążeń.



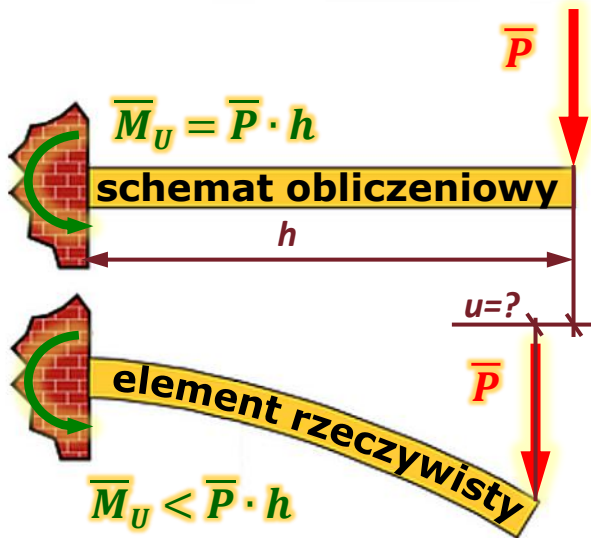
5.1. Wytrzymałość Materiałów – podstawowe pojęcia

Cel: dostarczenie podstaw teoretycznych do wybrania odpowiedniego materiału i takiego ukształtowania obiektu, aby mógł on spełniać swoje funkcje użytkowe, tj. na skutek obciążeń nie uległ zniszczeniu, bądź przez utratę spójności materiału, bądź to przez takie zmiany kształtu, które uniemożliwią jego użytkowanie.

Rodzaje odkształceń:

- **sprężyste** – zanikające wraz działaniem obciążenia,
- **plastyczne (trwałe)** – nie zanikające mimo zaniku działania obciążenia.

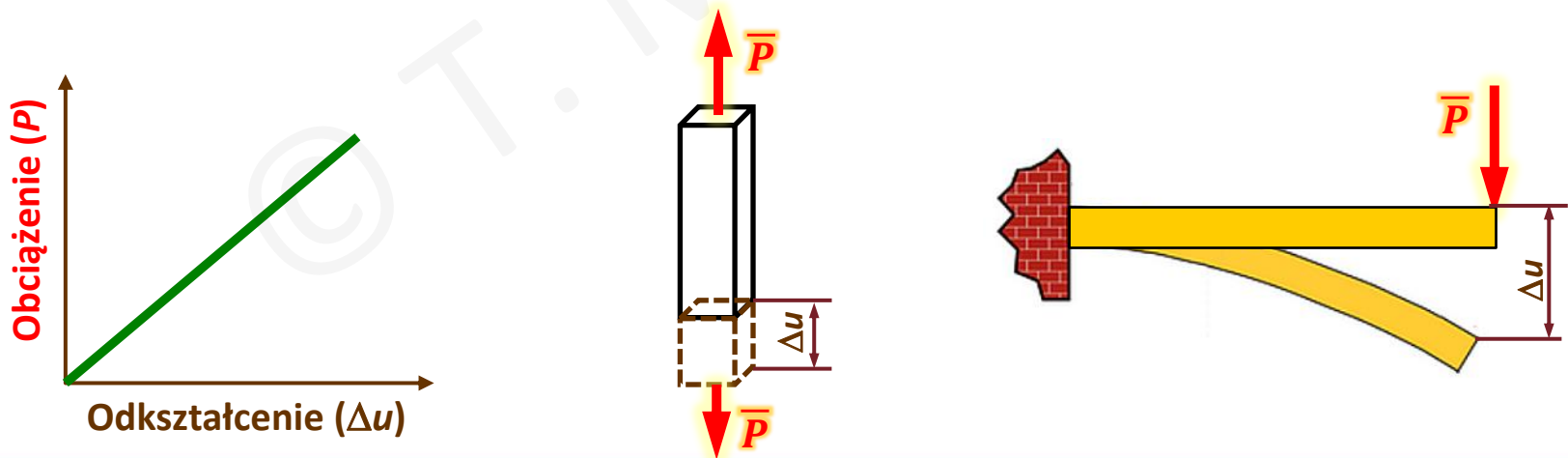
5.2. Wytrzymałość Materiałów – podstawowe założenia



Zasada zeszywnienia – założenie, że odkształcenia związane z działaniem sił zewnętrznych nie zmieniają linii działania tych sił.

Prawo Hooke'a:

Deformacja ciał sprężystych jest wprost proporcjonalna do przyłożonego obciążenia.

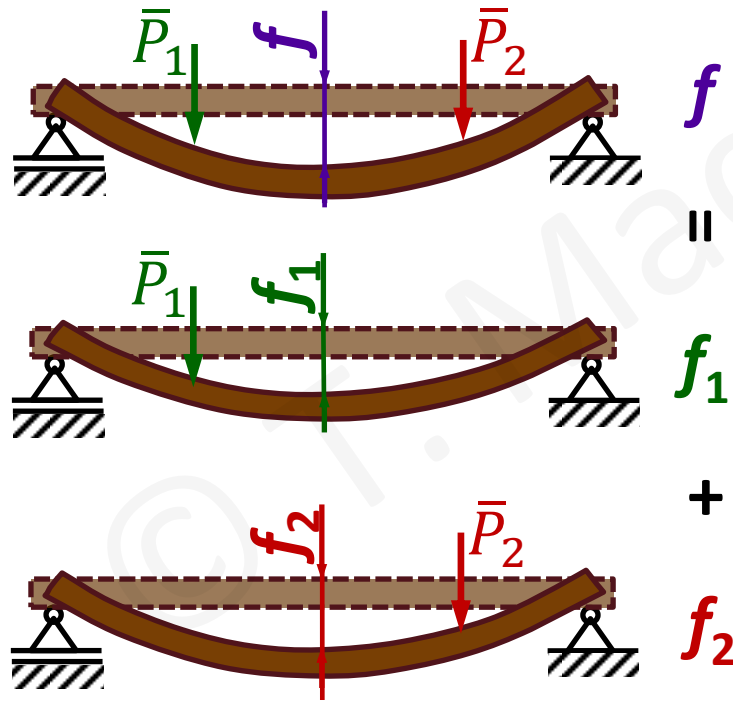


5.2. Wytrzymałość Materiałów – podstawowe założenia

Dzięki **prawu Hooke'a** możliwa jest do sformułowania...

Zasada superpozycji:

Dowolny skutek wywołany równoczesnym działaniem kilku obciążeń jest równy sumie skutków jakie wywołałoby każde z tych obciążeń działając z osobna.



Analizując przypadek wytrzymałości danego obiektu przyjąć należy odpowiedni ...

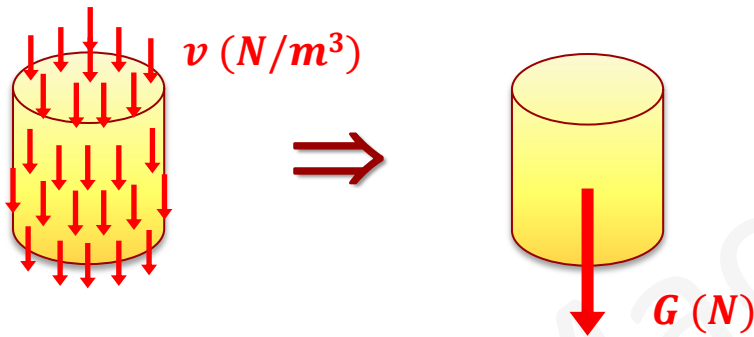
Schemat obliczeniowy

- idealizacja rzeczywistego problemu, polegająca na przyjęciu szeregu upraszczających założeń dotyczących w szczególności:
 - ✓ obciążenia (p. 5.3.1),
 - ✓ materiału (p. 5.3.2),
 - ✓ geometrii konstrukcji (p. 5.3.3).

© T. Machniewicz

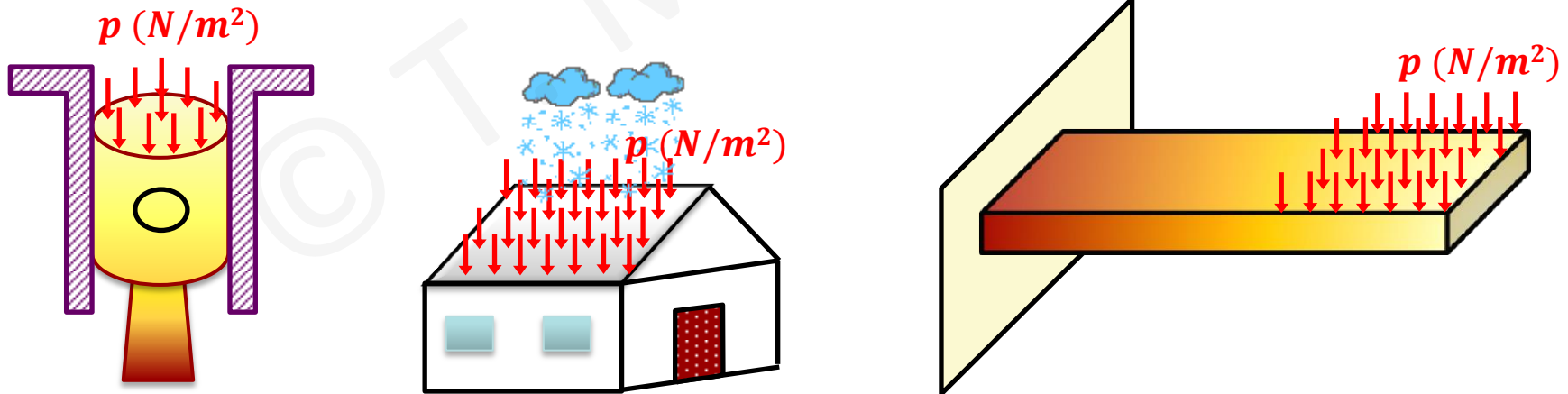
Rodzaje obciążeń – ze względu na sposób przyłożenia:

a) objętościowe (masowe) – działające na każdą cząstkę ciała (np. siły ciężkości),



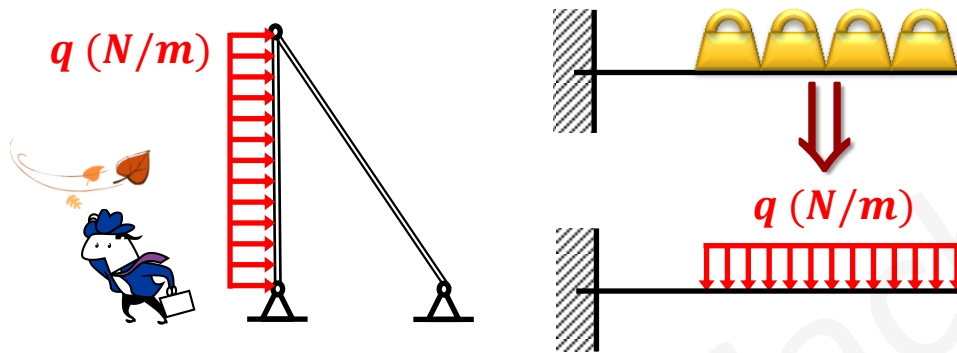
siły masowe zwykle zastępowane są działaniem siły skupionej przyłożonej w środku ciężkości bryły

b) powierzchniowe – działające na powierzchnię ciała,



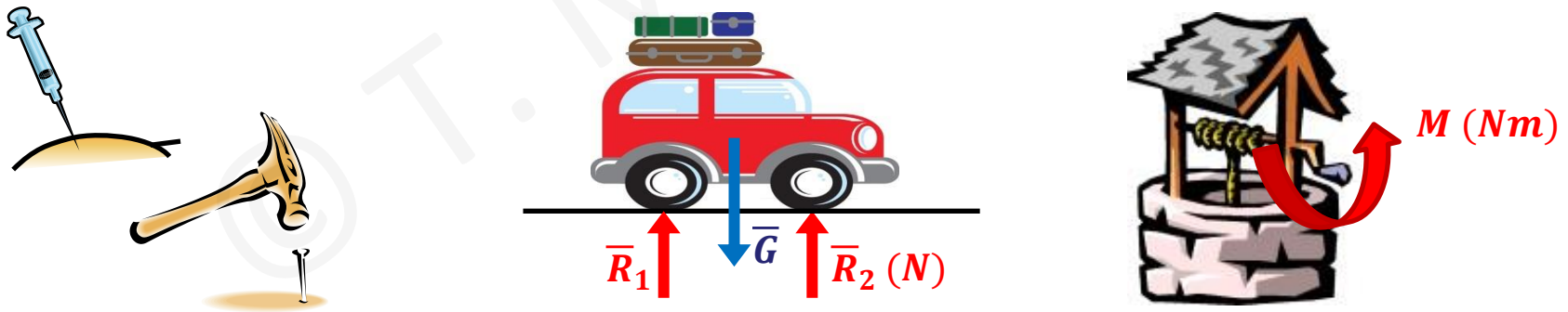
Rodzaje obciążeń – ze względu na sposób przyłożenia:

c) obciążenia liniowe – przyłożone w sposób ciągły na pewnej długości,



Zazwyczaj za pomocą obciążenia liniowego odwzorowuje się działanie obciążenia powierzchniowego w przypadku modeli płaskich

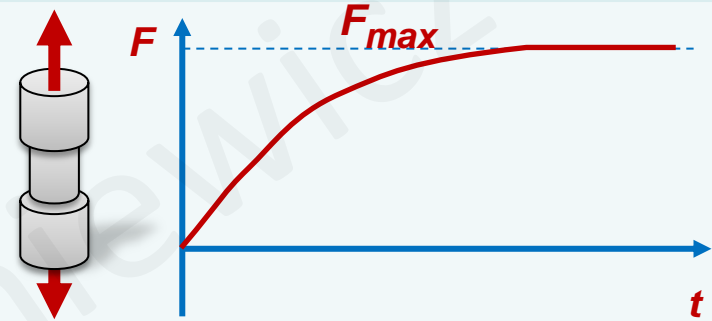
d) obciążenie skupione – siła lub moment siły przyłożone w punkcie,



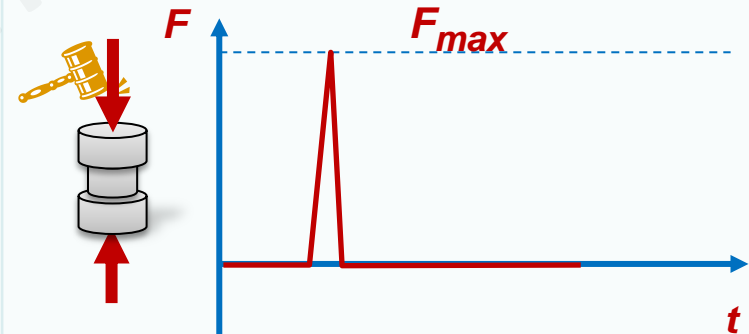
Dane obciążenie uznać można za skupione, jeżeli powierzchnia jego oddziaływania jest znacznie mniejsza od wymiarów elementu.

Rodzaje obciążeń – ze względu na zmiany w czasie:

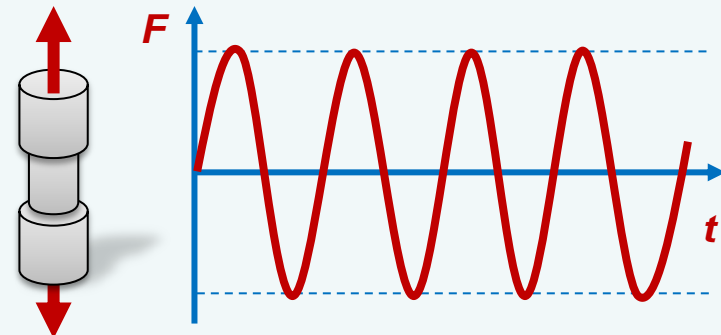
a) **statyczne** – narastające w sposób powolny od zera do pewnej wartości



b) **dynamiczne** – przyłożone w sposób nagły, działające impulsowo

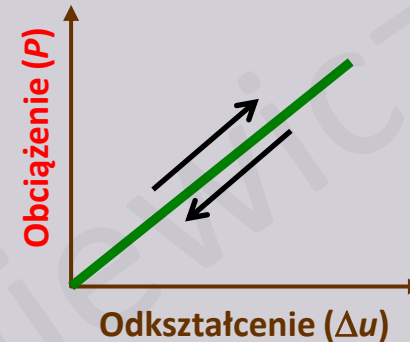


c) **okresowo-zmienne** – zmieniające wielokrotnie wartość w czasie

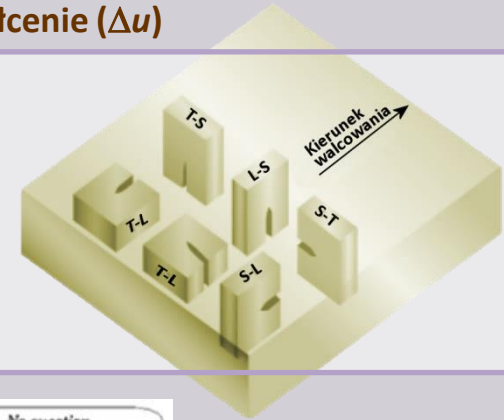


5.3.2. Założenia dotyczące własności materiałów

1) **sprężystość** – odkształcenia są proporcjonalne do działającego obciążenia.



2) **izotropowość (izotropia)** – własności fizyczne ciała nie zależą od kierunku. Przeciwnieństwem izotropii jest **anizotropia**.



3) **jednorodność** – własności fizyczne ciała są takie same w każdym jego punkcie.



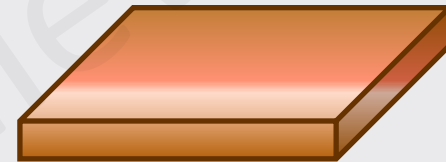
Na ogół powyższe własności spełnione są jedynie w sposób przybliżony

5.3.3. Klasyfikacja elementów konstrukcyjnych

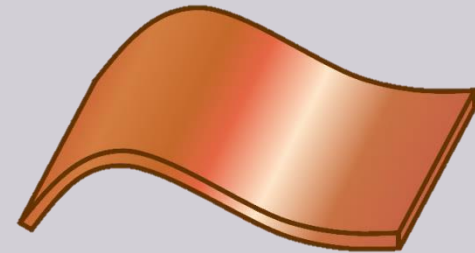
1) pręty – jeden z wymiarów elementu (długość) znacznie większy od wymiarów pozostałych (poprzecznych)



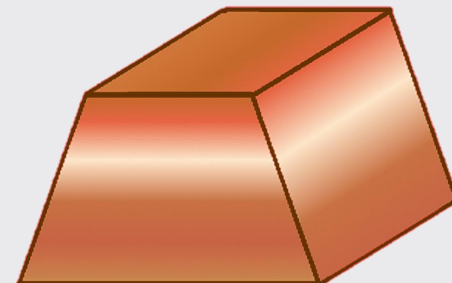
2) płyty – dwa wymiary liniowe są większe od trzeciego (grubości)



3) powłoki – rodzaj płyt charakteryzujący się krzywoliniową powierzchnią



4) bloki (bryły) – wszystkie wymiary tego samego rzędu



5.4. Kryteria oceny elementów konstrukcji:

1) Warunek bezpieczeństwa:

zabezpiecza element przed zniszczeniem (utrata spójności, trwałą deformacją) pod wpływem założonego obciążenia.



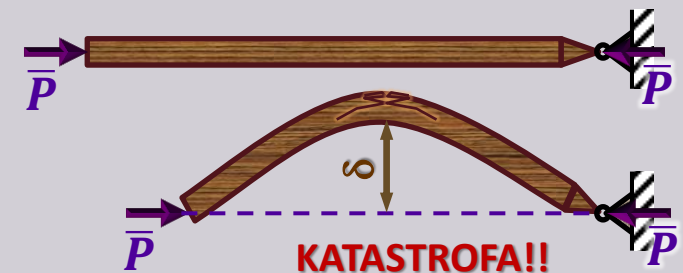
2) Warunek sztywności:

ogranicza odkształcenia elementu tak, by nie utrudniały one, bądź wręcz nie uniemożliwiały właściwego jego funkcjonowania.



3) Warunek stateczności:

zapobiega pojawieniu się pod wpływem znacznych odkształceń dodatkowych sił wewnętrznych mogących uszkodzić element.



4) Warunek ekonomiczności:

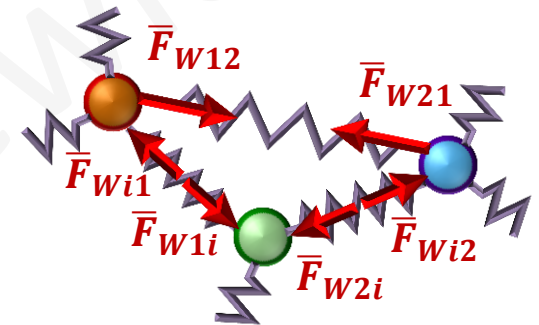
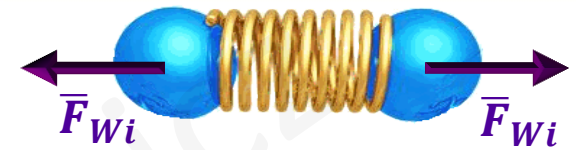
stoi na straży właściwego doboru materiału i wymiarów elementu, z pełnym wykorzystaniem własności zastosowanego tworzywa.

KATASTROFA ... finansowa

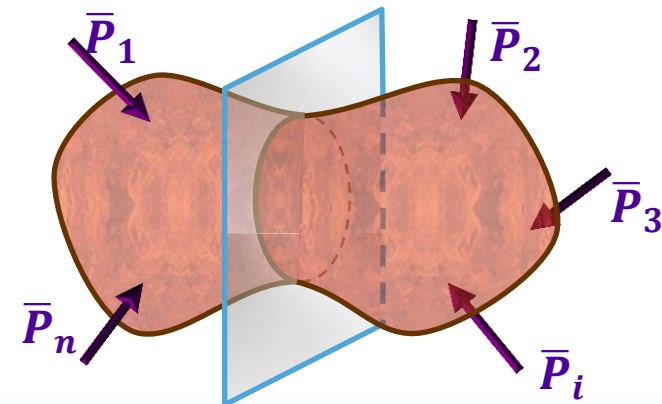


5.5. Siły wewnętrzne

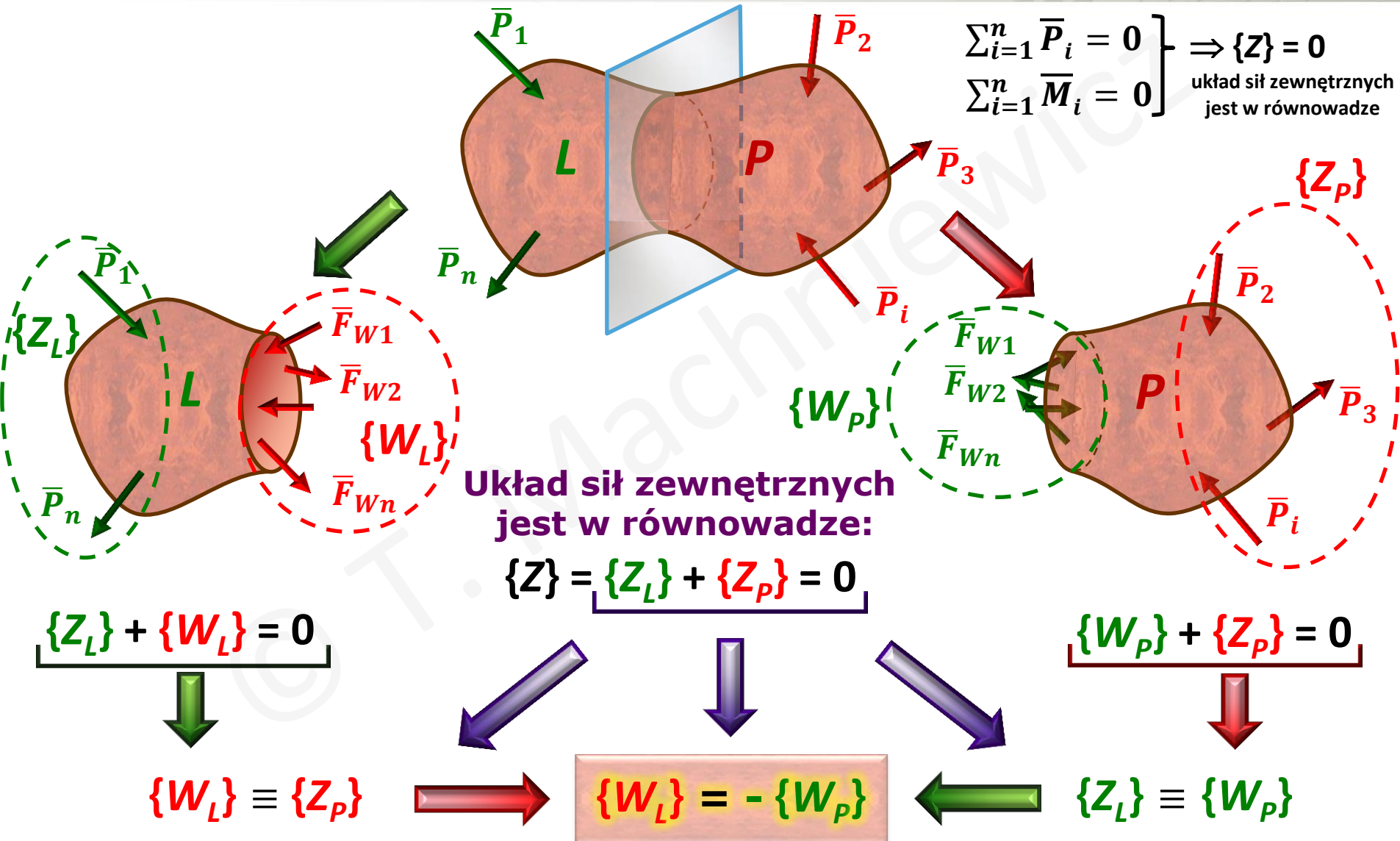
- Pod wpływem obciążeń zewnętrznych pomiędzy poszczególnymi cząstkami ciała powstają siły wzajemnego oddziaływania, zwane **siłami wewnętrznymi**.
- **Siły wewnętrzne** są siłami biernymi, które przeciwdziałają odkształceniom ciała, tj. zmianie odległości pomiędzy poszczególnymi jego punktami. Sumaryczna praca tych sił na przemieszczeniu punktów odpowiada energii sprężystej zgromadzonej w odkształconym ciele.
- Jeżeli całe ciało (o objętości V) jest w równowadze, tzn. działające na niego siły zewnętrzne równoważą się, to jest w równowadze każdy punkt tego ciała, czyli **siły wewnętrzne** również się równoważą.
- W celu określenia **sił wewnętrznych** w dowolnym płaskim przekroju danego ciała należy przeciąć go na dwie części odpowiednią myślową płaszczyzną. Po odrzuceniu jednej z nich siły wewnętrzne działające w rozpatrywanej płaszczyźnie wyznacza się rozpatrując równowagę części pozostałej zgodnie z równaniami równowagi statycznej.



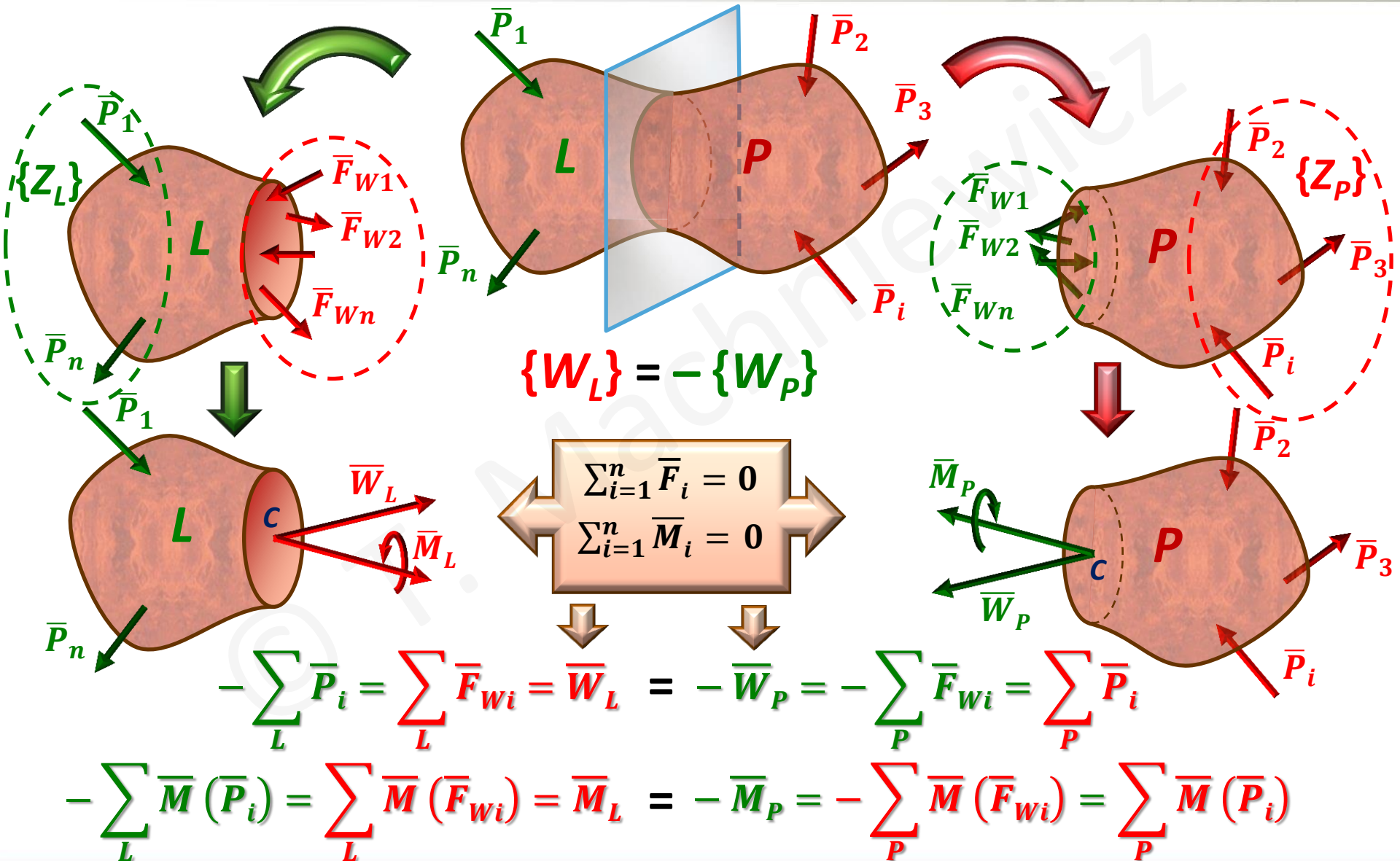
$$\sum_V \bar{F}_{wij} = 0$$



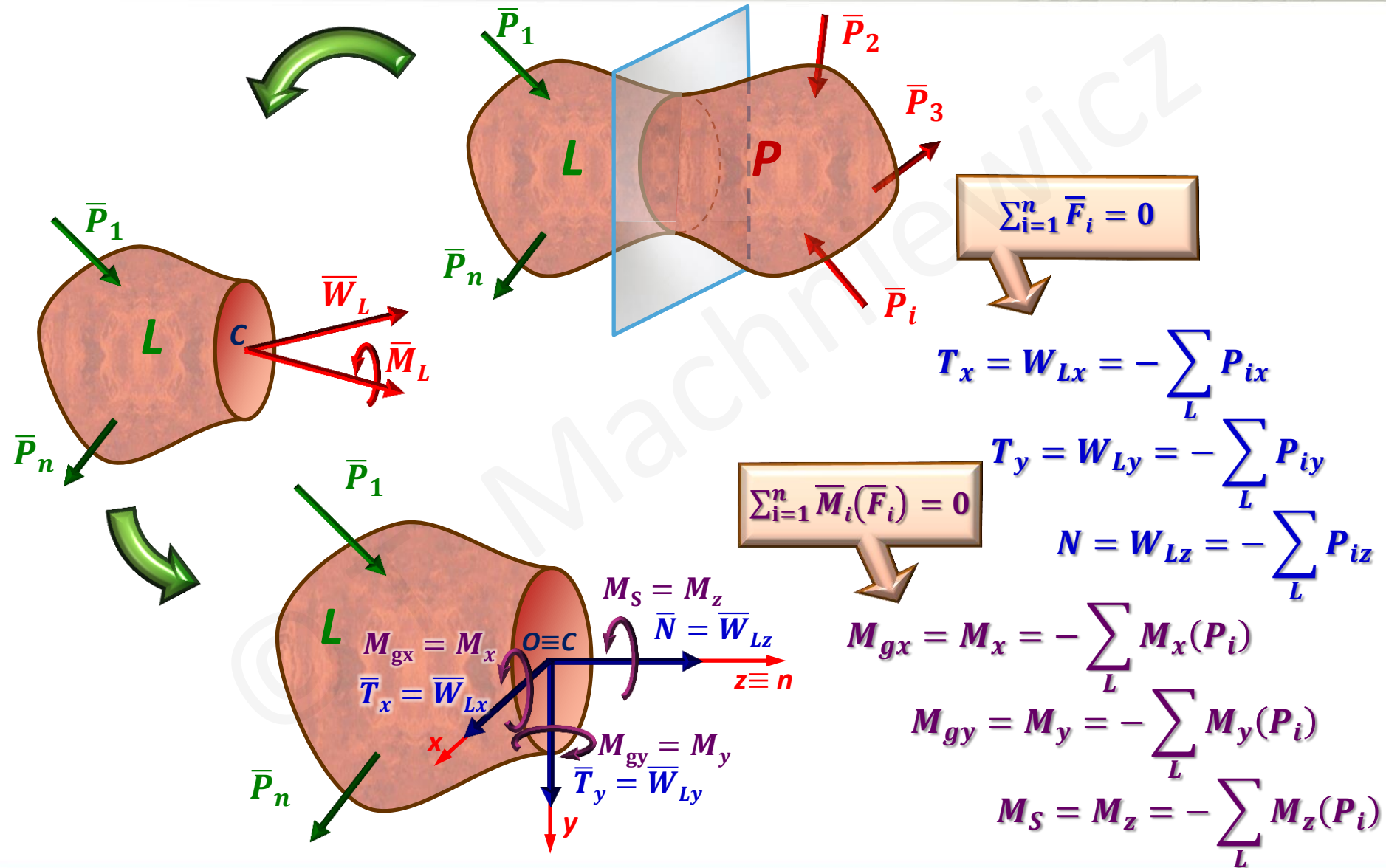
5.6. Wyznaczanie sił wewnętrznych



5.6. Wyznaczanie sił wewnętrznych



5.6. Wyznaczanie sił wewnętrznych



The diagram illustrates the determination of internal forces in a body L cut by a plane P . The body is shown in three states: whole, cut, and cut with internal forces and moments.

Force Equilibrium:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0$$

$$T_x = W_{Lx} = - \sum_L P_{ix}$$

$$T_y = W_{Ly} = - \sum_L P_{iy}$$

$$N = W_{Lz} = - \sum_L P_{iz}$$

Moment Equilibrium:

$$\sum_{i=1}^n \bar{M}_i(\bar{F}_i) = 0$$

$$M_{gx} = M_x = - \sum_L M_x(P_i)$$

$$M_{gy} = M_y = - \sum_L M_y(P_i)$$

$$M_S = M_z = - \sum_L M_z(P_i)$$

Internal Force and Moment Definitions:

$$M_S = M_z$$

$$\bar{N} = \bar{W}_{Lz}$$

$$M_{gx} = M_x$$

$$\bar{T}_x = \bar{W}_{Lx}$$

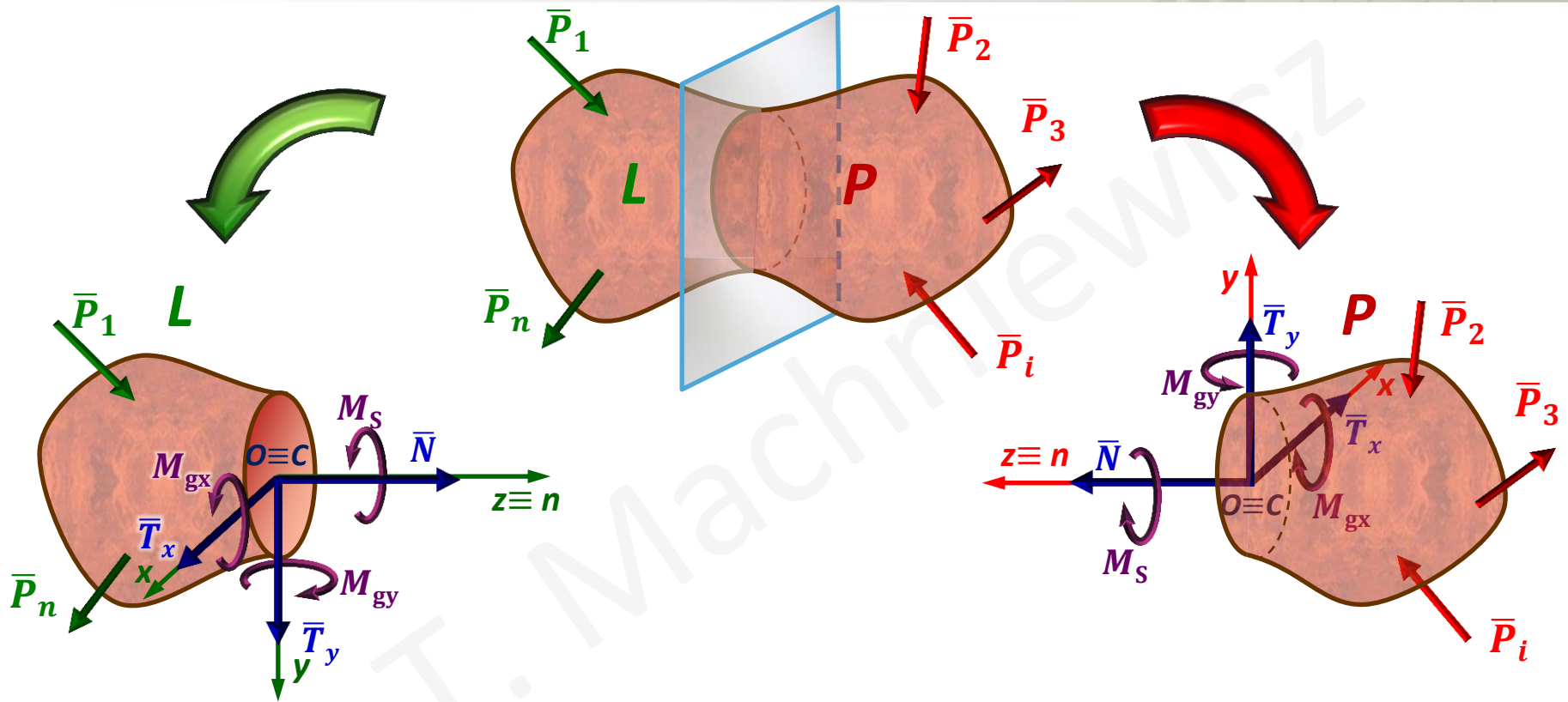
$$M_{gy} = M_y$$

$$\bar{T}_y = \bar{W}_{Ly}$$

Coordinate System:

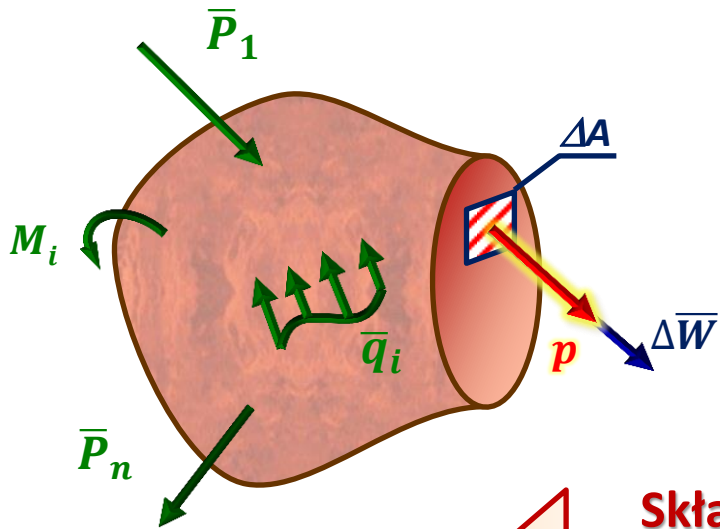
$$z \equiv n$$

5.6. Wyznaczanie sił wewnętrznych



- 1) Siły wewnętrzne działające na obydwie strony myślowego przekroju stanowią układ sił wzajemnie równoważących się, dzięki czemu można je wyznaczyć analizując dowolną odciętą część ciała.
- 2) Dokonuje się tego w lokalnym układzie współrzędnych, związanym z osią normalną, tj. prostopadłą do rozpatrywanego przekroju i skierowaną na zewnątrz. Z tego powodu nie tylko moduły ale i znaki sił wewnętrznych wyznaczonych dla obu stron myślowego przekroju będą takie same.

5.7. Naprężenia



Definicja naprężenia:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{dW}{dA}$$

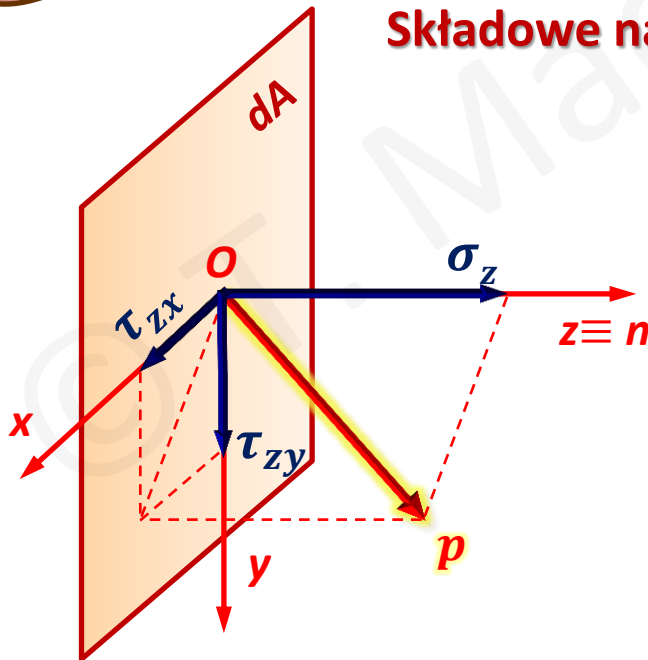
Jednostka naprężenia:

$$1 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ m}^2}$$

$$1 \text{ MPa} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ mm}^2}$$

$$1 \text{ MPa} = \frac{1 \text{ MN}}{1 \text{ m}^2}$$

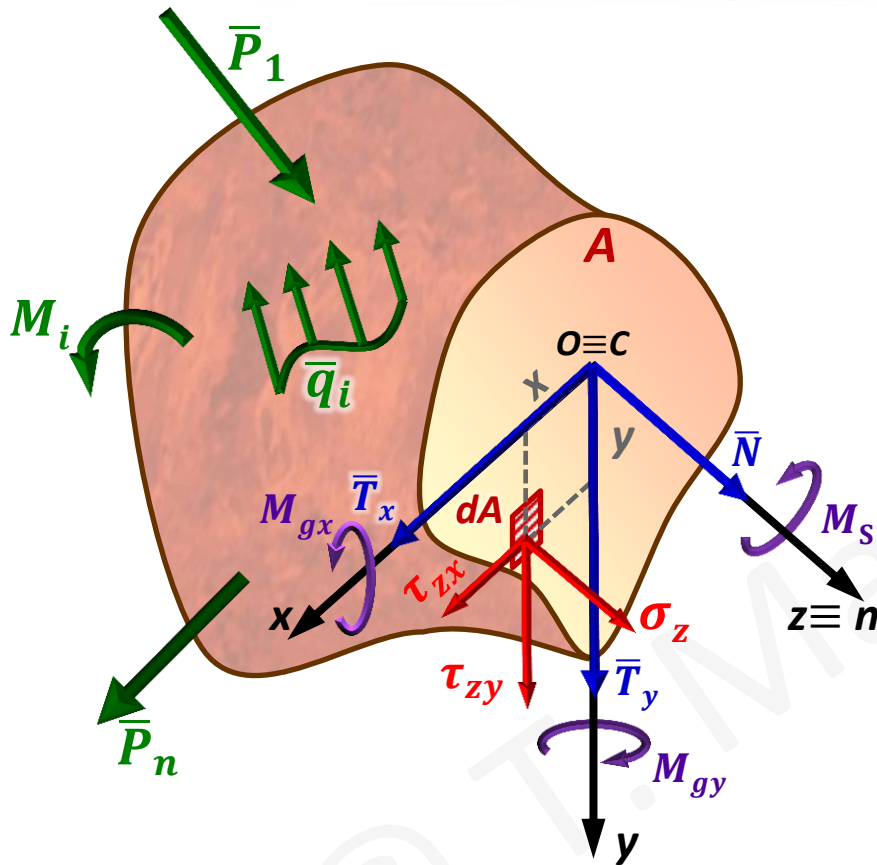
Składowe naprężenia:



σ_z – naprężenie normalne

τ_{zx}, τ_{zy} - naprężenia styczne

5.8. Zależności pomiędzy siłami wewnętrznymi a naprężeniem



$$N = \int_A \sigma_z dA \quad - \text{rozciąganie/ściskanie}$$

$$T_x = \int_A \tau_{zx} dA \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} - \text{ściananie}$$

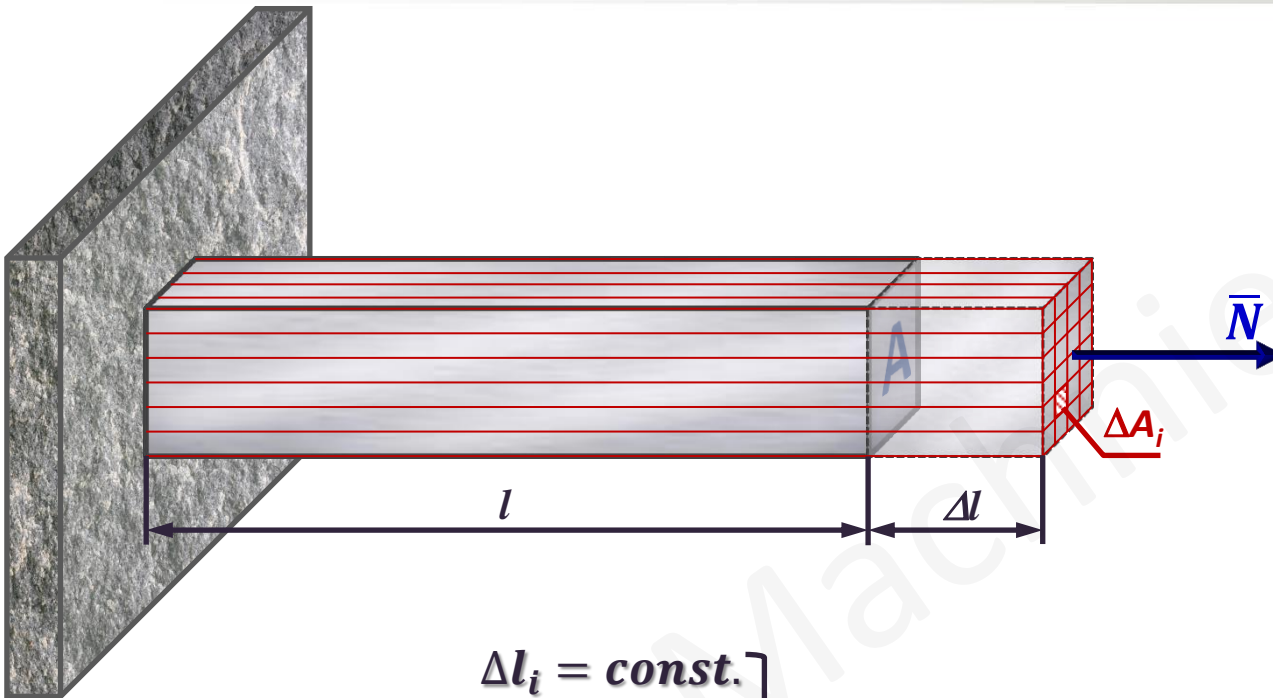
$$T_y = \int_A \tau_{zy} dA$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} - \text{zginanie}$$

$$M_y = \int_A \sigma_z x dA$$

$$M_S = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA \quad - \text{skręcanie}$$

5.9. Rozciąganie/ściskanie - naprężenia



$$\Delta l_i = \text{const.}$$

Zgodnie z prawem Hooke'a: $\frac{\Delta l}{l} \sim \sigma$ } $\sigma_i = \text{const.} = \sigma_r$

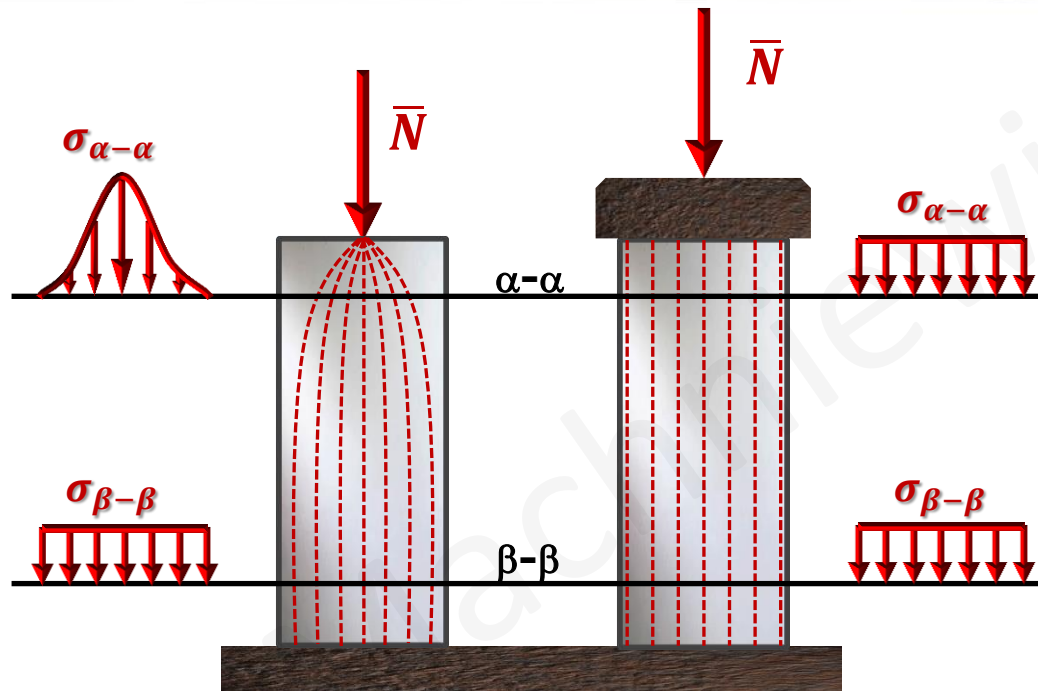
Miedzy N a σ_r zachodzi zależność: $N = \int_A \sigma_r dA$

$$N = \sigma_r \int_A dA = \sigma \cdot A$$



$$\sigma_r = \frac{N}{A}$$

5.10. Zasada de Saint-Venanta

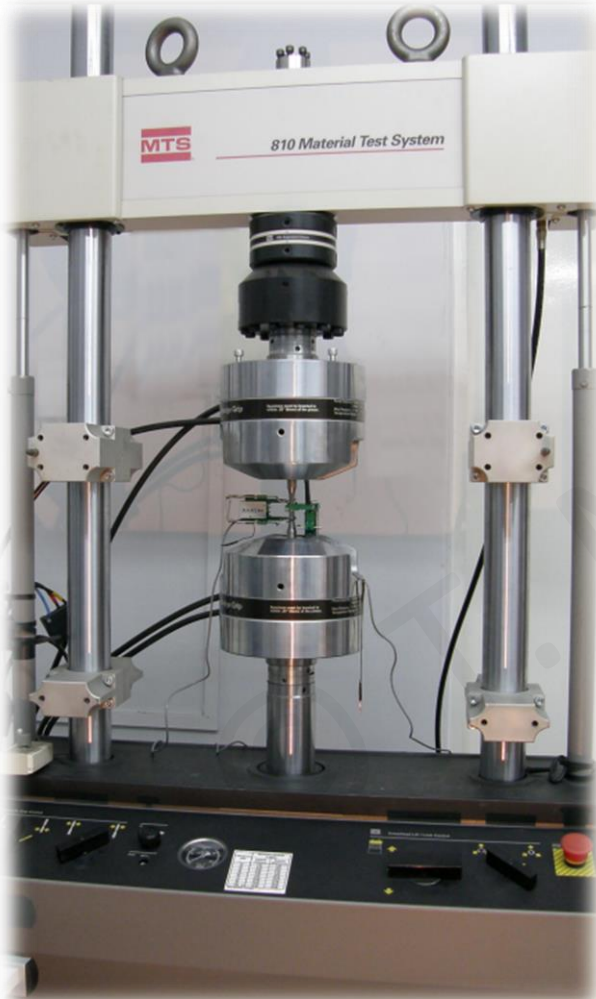


Jeżeli na pewien obszar ciała sprężystego, pozostającego w równowadze, działają w różny sposób przyłożone lecz statycznie równoważne obciążenia, to w dostatecznej odległości od tego obszaru rozkłady naprężeń są jednakowe, a więc nie zależą od sposobu przyłożenia obciążenia

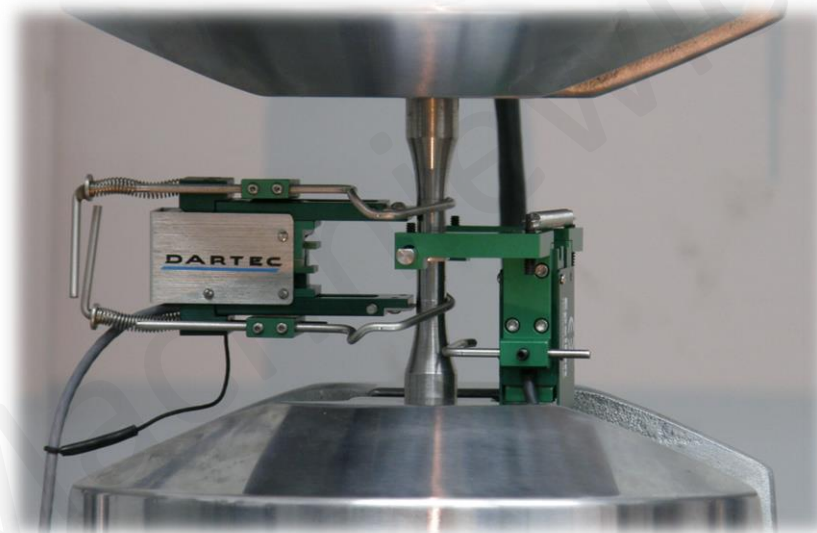
5.11. Próba statycznego rozciągania i ściskania

Aparatura badawcza:

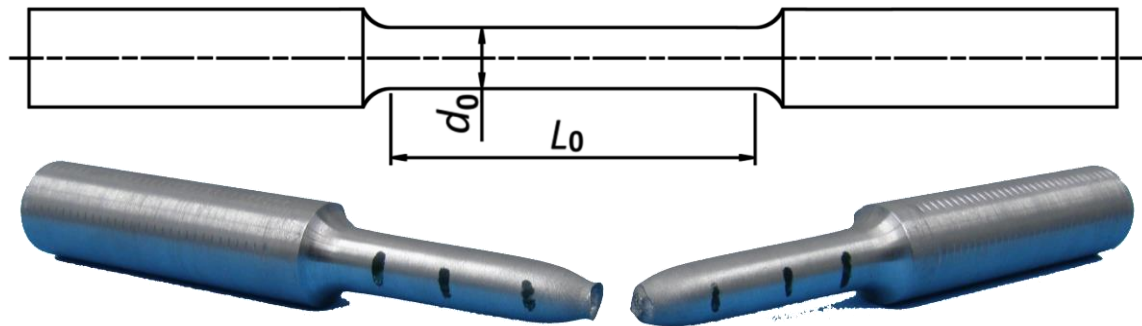
Maszyna wytrzymałościowa:



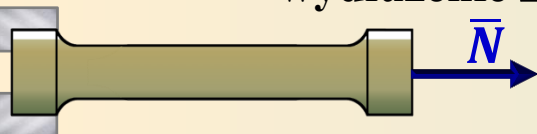
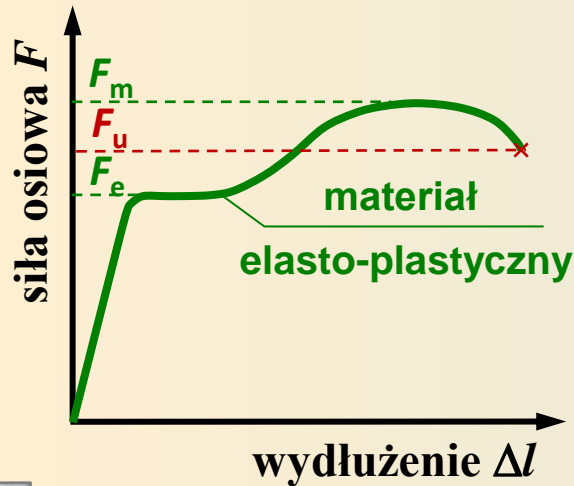
Ekstensometr liniowy i średnicowy:



Geometria próbki:



5.12. Krzywa monotonicznego rozciągania/ściskania



$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

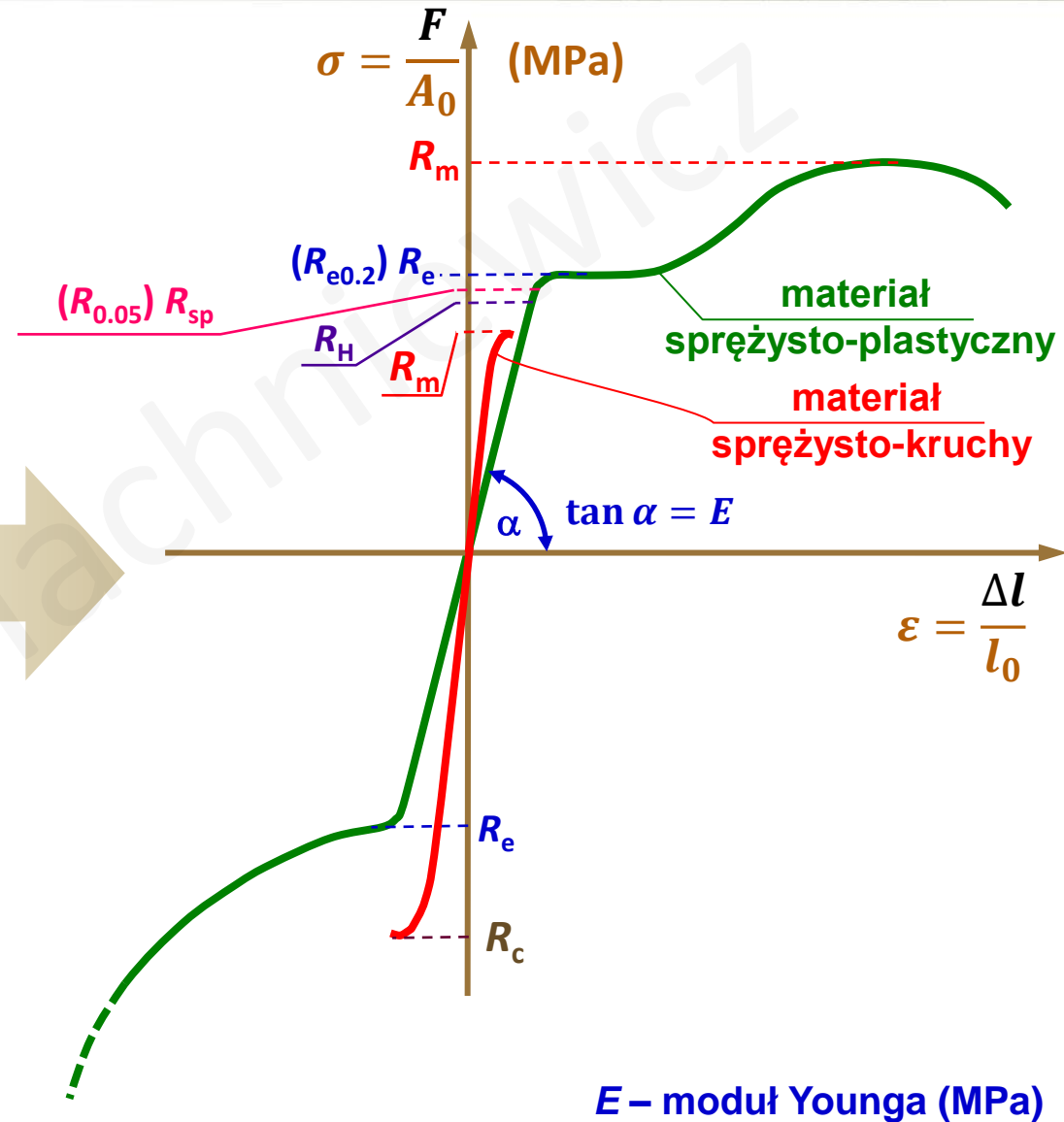
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Naprężenia inżynierskie:

Odształcenia inżynierskie:

l_0 – długość początkowa,

A_0 – początkowe pole przekroju poprzecznego



5.12. Krzywa monotonicznego rozciągania/ściskania

Charakterystyczne granice wytrzymałościowe:

Granica proporcjonalności (R_H) to naprężenie inżynierskie wyznaczające koniec zakresu w obrębie którego zachodzące odkształcenie jest proporcjonalne do wywołującego je naprężenia (granica liniowej sprężystości, granica obowiązywania prawa Hooke'a)

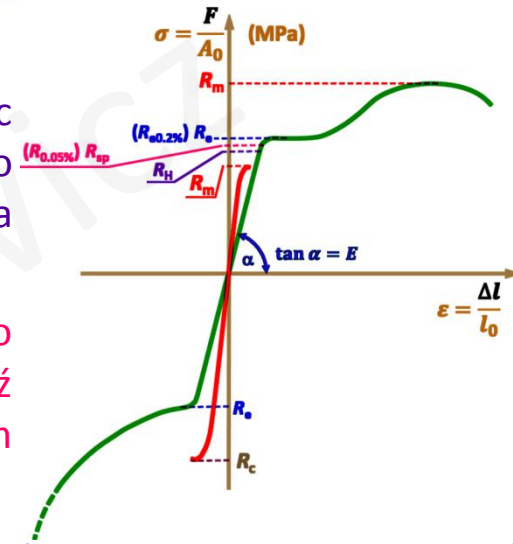
Granica sprężystości (R_{sp}) to naprężenie inżynierskie, po przekroczeniu którego ciało, mimo odciążenia, nie powraca już do pierwotnych kształtów bądź wymiarów. Umowna granica sprężystości odpowiada naprężeniu przy którym odkształcenia trwałe osiągają pewną umowną wartość (np. 0.05% przy $R_{0.05}$).

Granica plastyczności (R_e) to wartość naprężenia inżynierskiego przy którym zaczynają powstawać nieodwracalne odkształcenia plastyczne. Przy tzw. wyraźnej granicy plastyczności następuje wyraźny wzrost odkształceń bez przyrostu, lub nawet przy chwilowym spadku, naprężeń. Umowna granica sprężystości odpowiada naprężeniu przy którym odkształcenia plastyczne osiągają pewną umowną wartość (np. 0.2% przy $R_{0.2}$).

Wytrzymałość na rozciąganie (R_m) to naprężenie inżynierskie odpowiadające największej sile rozciągającej F_m uzyskanej w czasie statycznej próby rozciągania.

Wytrzymałość na ściskanie (R_c) to naprężenie inżynierskie odpowiadające największej sile ściskającej F_c uzyskanej w czasie statycznej próby ściskania.

Naprężenie zrywające (R_u) to rzeczywista wartość naprężenia działającego w miejscu zniszczenia próbki w momencie utraty spójności, odpowiadająca sile przyłożonej do próbki w chwili zniszczenia (F_u), odniesionej do rzeczywistego pola przekroju poprzecznego próbki (A_u) w miejscu jej rozerwania ($R_u = F_u / A_u$).



5.12. Krzywa monotonicznego rozciągania/ściskania

Charakterystyczne parametry:

Odształcenia do zniszczenia (A lub ε_f) – trwałe odształcenie inżynierskie próbki zmierzone po zerwaniu:

$$\varepsilon_f = \frac{l_U - l_0}{l_0};$$

gdzie: l_U – łączna długość próbki po rozerwaniu,
 l_0 – długość początkowa próbki

Przewężenie (q) – względna zmiana pola przekroju poprzecznego próbki w miejscu jej zerwania:

$$q = \frac{A_0 - A_U}{A_0};$$

gdzie: A_U – pole przekroju poprzecznego próbki po zerwaniu,
 A_0 – początkowe pole przekroju poprzecznego próbki,

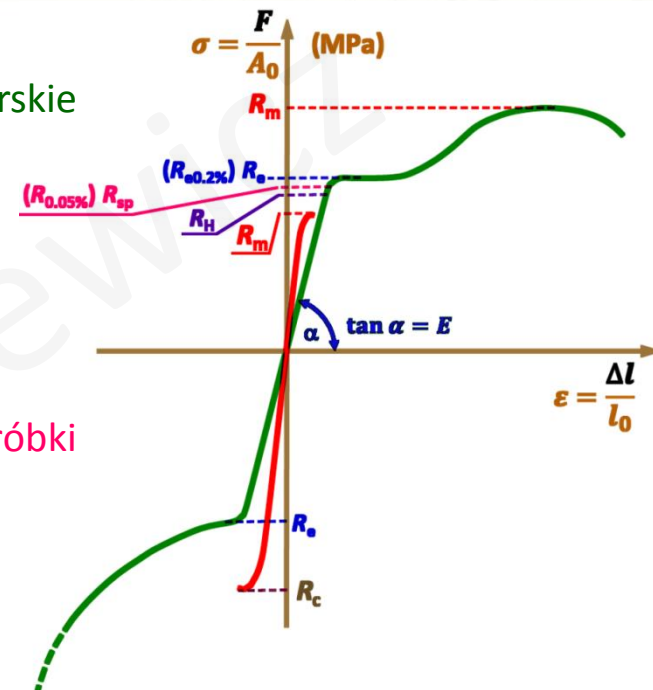
Moduł Younga (E) (moduł sprężystości podłużnej) – stała określająca sprężystość materiału, wyrażająca się zależnością względnego odształcenia liniowego materiału (ε) od działającego wzdłuż tego samego kierunku normalnego naprężenia (σ), w zakresie odształceń sprężystych. Moduł Younga odpowiada tangensowi kąta nachylenia inżynierskiej krzywej rozciągania $\sigma - \varepsilon$ do osi odształceń (ε) w zakresie obciążeń poniżej granicy proporcjonalności (R_H).

$$E = \sigma / \varepsilon$$



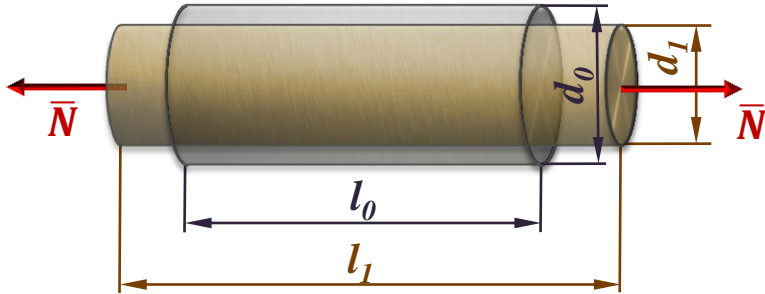
$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

- prawo Hooke'a



materiał	E , GPa
guma	0.01-0.1
polipropylen	1.5-2
drewno (dębina)	11
beton	~30
szkło	50-90
aluminium	69
miedź	100-115
stal	190-210
diament	1050-1200

5.13. Odkształcenia poprzeczne przy obciążeniach osiowych

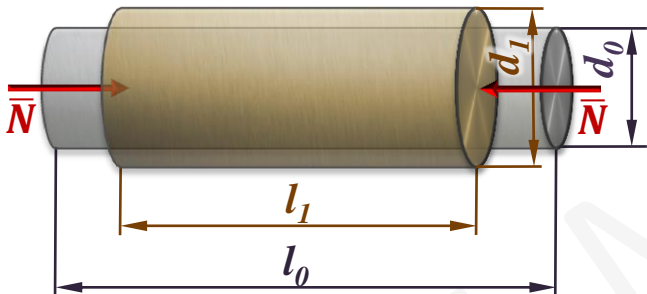


Odkształcenie wzdłużne:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad \Delta l = l_1 - l_0$$

Odkształcenie poprzeczne:

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta d}{d_0} \quad \Delta d = d_1 - d_0$$



$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon} = -\nu$$

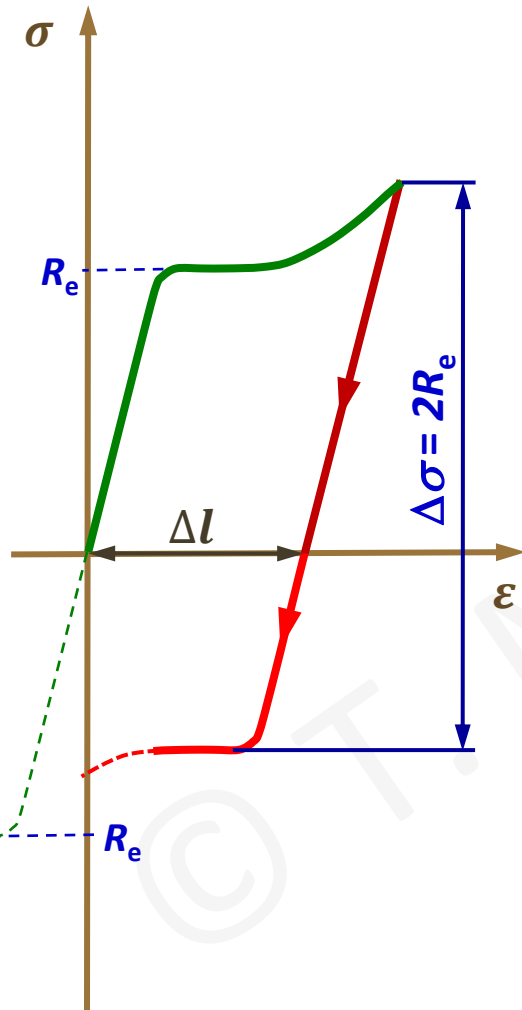
Średnica końcowa:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_p = -\nu \varepsilon = -\nu \frac{\Delta l}{l_0} \\ \varepsilon_p = \frac{\Delta d}{d_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \Delta d = -\nu \frac{\Delta l}{l_0} d_0 \\ \Delta d = d_1 - d_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} d_1 = d_0 - \nu \frac{\Delta l}{l_0} d_0 \\ d_1 = d_0 \left(1 - \nu \frac{\Delta l}{l_0} \right) \end{aligned} \right\}$$

ν – liczba Poissona ($0 \leq \nu \leq 0.5$)

materiał	ν
korek	0
szkło	0.18-0.3
beton	0.2
żeliwo	0.23-0.27
stal	0.24-0.3
stopy Al	0.26-0.36
miedź	0.33
tytan	0.35
kauczuk	0.5

5.14. Reakcja materiału na odciążenie



Efekt Bauschingera:

Jeżeli przy obciążaniu materiału wykazującego efekt umocnienia przekroczona zostanie granica plastyczności, to przy zmianie kierunku obciążenia (odciążaniu) odwrócone płynięcie materiału nastąpi gdy zmiana naprężenia osiągnie wartość $\Delta\sigma = 2R_e$, tj. powyżej poziomu granicy plastyczności przy monotonicznym ścisnaniu.

5.15. Rozciąganie/ściskanie – warunek bezpieczeństwa

$$\sigma_r(\sigma_c) = \frac{N}{A} \leq k_r(k_c)$$

$\sigma_r(\sigma_c)$ - naprężenia rozciągające (ściskające)

$k_r(k_c)$ – dopuszczalne naprężenia w przypadku rozciągania (ściskania)

Naprężenia dopuszczalne

Zależność ogólna:

$$k = \frac{K}{n}$$

K – naprężenia krytyczne

n – współczynnik bezpieczeństwa

materiały elasto-plastyczne

$$k_r = k_c = \frac{R_e}{n_e}$$

materiały kruche

$$k_r = \frac{R_m}{n_m}$$

$$k_c = \frac{R_c}{n_c}$$

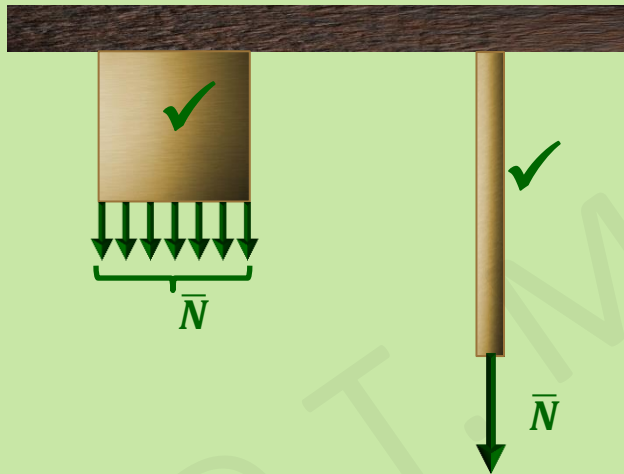
$$R_c > R_m \Rightarrow k_c > k_r$$

n_e, n_m, n_c – współczynniki bezpieczeństwa

5.16. Ograniczenie zastosowania warunku bezpieczeństwa

Rozciąganie

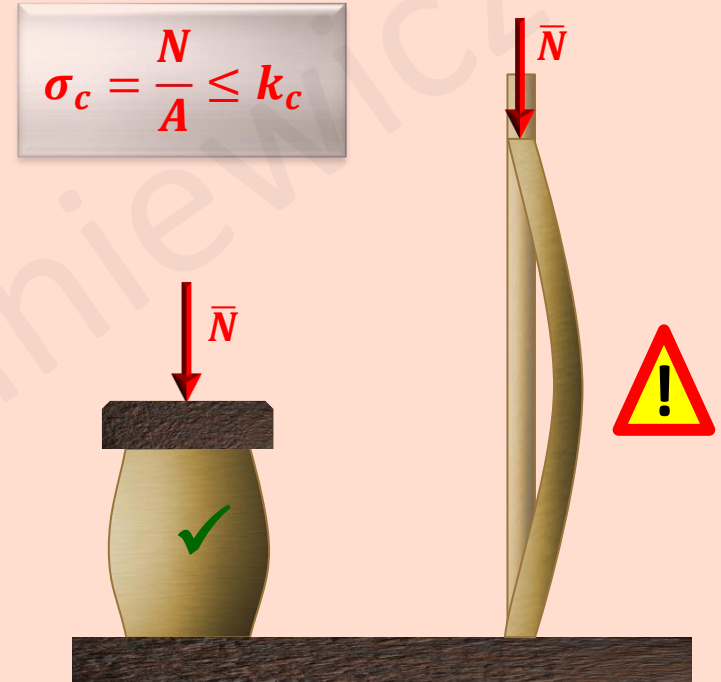
$$\sigma_r = \frac{N}{A} \leq k_r$$



Spełnienie warunku bezpieczeństwa gwarantuje bezpieczną pracę obiektu, bez względu na jego długość.

Ściskanie

$$\sigma_c = \frac{N}{A} \leq k_c$$

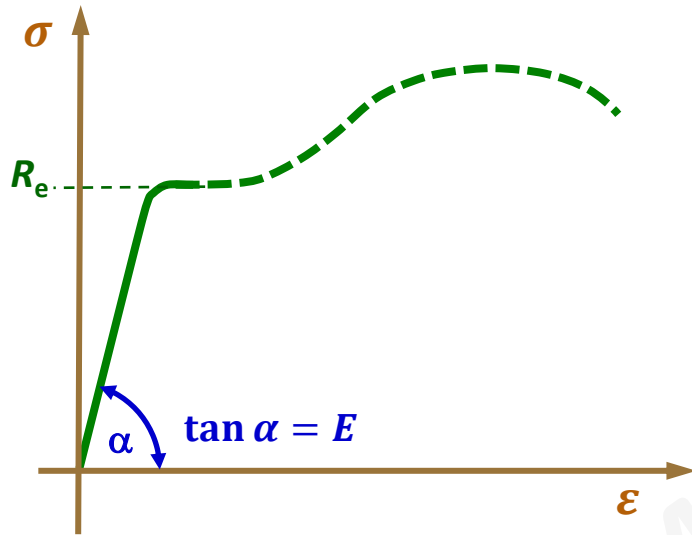


W przypadku elementów o dużej smukłości (znaczną długość w stosunku do wymiaru poprzecznego) nie gwarantuje jego bezpiecznej pracy spełnienie samego warunku bezpieczeństwa na ściskanie.

Z uwagi na zjawisko wyboczenia konieczne jest uwzględnienie warunku stateczności.

5.17. Rozciąganie/ściskanie – warunek sztywności

Prawo Hooke'a :



$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\Delta l = \frac{Pl}{AE}$$

Warunek sztywności:

$$\Delta l = \frac{Pl}{AE} \leq \Delta l_{dop}$$

P – osiowa siła

l – długość elementu

A – pole przekroju poprzecznego

E – moduł Younga

Δl_{dop} – dopuszczalna zmiana długości elementu



Warunek ekonomiczności w przypadku konstruowania elementów poddawanych rozciąganiu/ściskaniu polega między innymi na unikaniu nadmiernego przewymiarowywania wymiarów poprzecznych elementów, ponad wartość teoretyczną (A_{min}) spełniającą odpowiedni warunek bezpieczeństwa:

$$A_{min} = \frac{N}{k_r} \quad A_{min} = \frac{N}{k_c}$$

Dopuszczalne naprężenia k_r i k_c spełniają już wymagane zapasy bezpieczeństwa.

© T. Machniewicz

Przykład 5.1:

Tensometr oporowy* naklejony na powierzchni kości, wskazuje że działają w tym przekroju średnie naprężenia rozciągające o wartości $\sigma = 3.2$ MPa, gdy kość obciążona jest osiową siłą $F = 1$ kN. Zakładając, że kość ma pierścieniowy przekrój poprzeczny o średnicy zewnętrznej $D = 25$ mm, obliczyć średnicę d jamy szpikowej.

Dane:

$$\sigma = 3.2 \text{ MPa}, F = 1 \text{ kN}, D = 25 \text{ mm}$$

Szukane:

$$d = ?$$

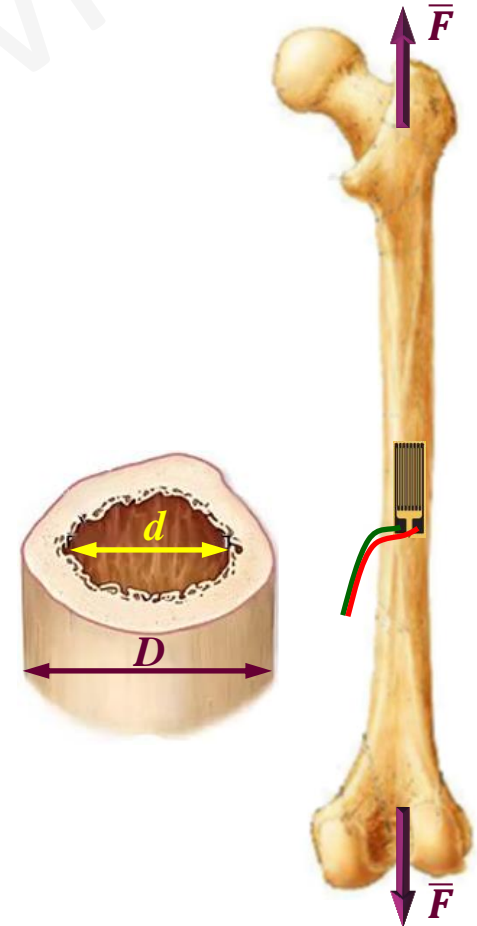
Ze wzoru na naprężenia osiowe:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{F}{A_r} \\ A_r &= \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma = \frac{4 \cdot F}{\pi(D^2 - d^2)}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{D^2 - \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot \sigma}}$$

$$d = \sqrt{25^2 - \frac{4 \cdot 1000}{\pi \cdot 3.2}} = \sqrt{227.113} \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \underline{d_{\text{śr}} = 15.07 \text{ mm}}$$



* rodzaj czujnika odkształcenia (zob. Wykład nr 8)

Przykład 5.2:

Obliczyć wartości naprężeń w poszczególnych częściach pręta jak na rysunku, całkowitą zmianę jego długości wywołaną działającym obciążeniem, a także końcową średnicę w przekroju 3-3.

Dane:

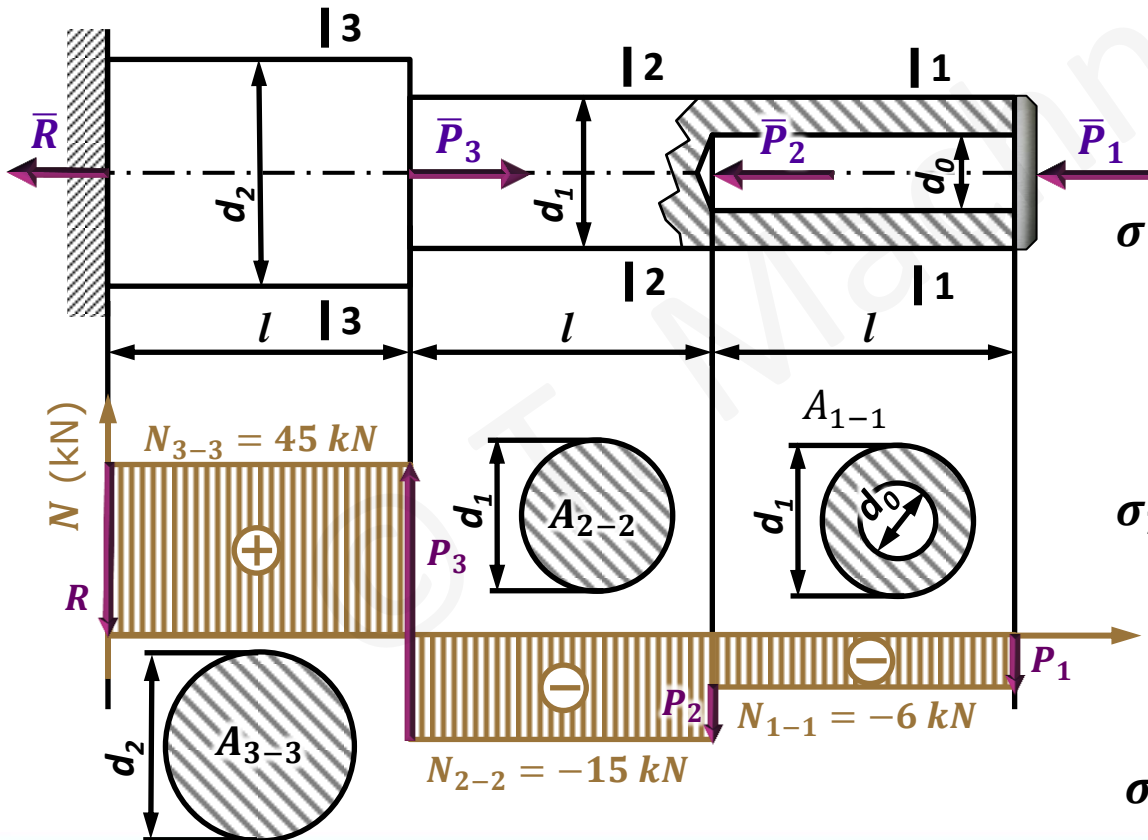
$$P_1=6 \text{ kN}, P_2=9 \text{ kN}, P_3=60 \text{ kN}, E=2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \nu=0.3$$

$$d_1=20 \text{ mm}, d_0=10 \text{ mm}, d_2=30 \text{ mm}, l=400 \text{ mm}$$

Szukane:

$$\sigma_{1-1}, \sigma_{2-2}, \sigma_{3-3} = ???$$

$$\Delta l_c = ?, d_2' = ?$$



$$\sigma_{1-1} = \frac{N_{1-1}}{A_{1-1}} = \frac{4 \cdot N_{1-1}}{\pi(d_1^2 - d_0^2)}$$

$$\sigma_{1-1} = \frac{4 \cdot (-6000)}{\pi(20^2 - 10^2)} = -25.46 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{2-2} = \frac{N_{2-2}}{A_{2-2}} = \frac{4 \cdot N_{2-2}}{\pi d_1^2}$$

$$\sigma_{2-2} = \frac{4 \cdot (-15000)}{\pi \cdot 20^2} = -47.75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{3-3} = \frac{N_{3-3}}{A_{3-3}} = \frac{4 \cdot N_{3-3}}{\pi d_2^2}$$

$$\sigma_{3-3} = \frac{4 \cdot 45000}{\pi \cdot 30^2} = 63.66 \text{ MPa}$$

Przykład 5.2:

Dane:

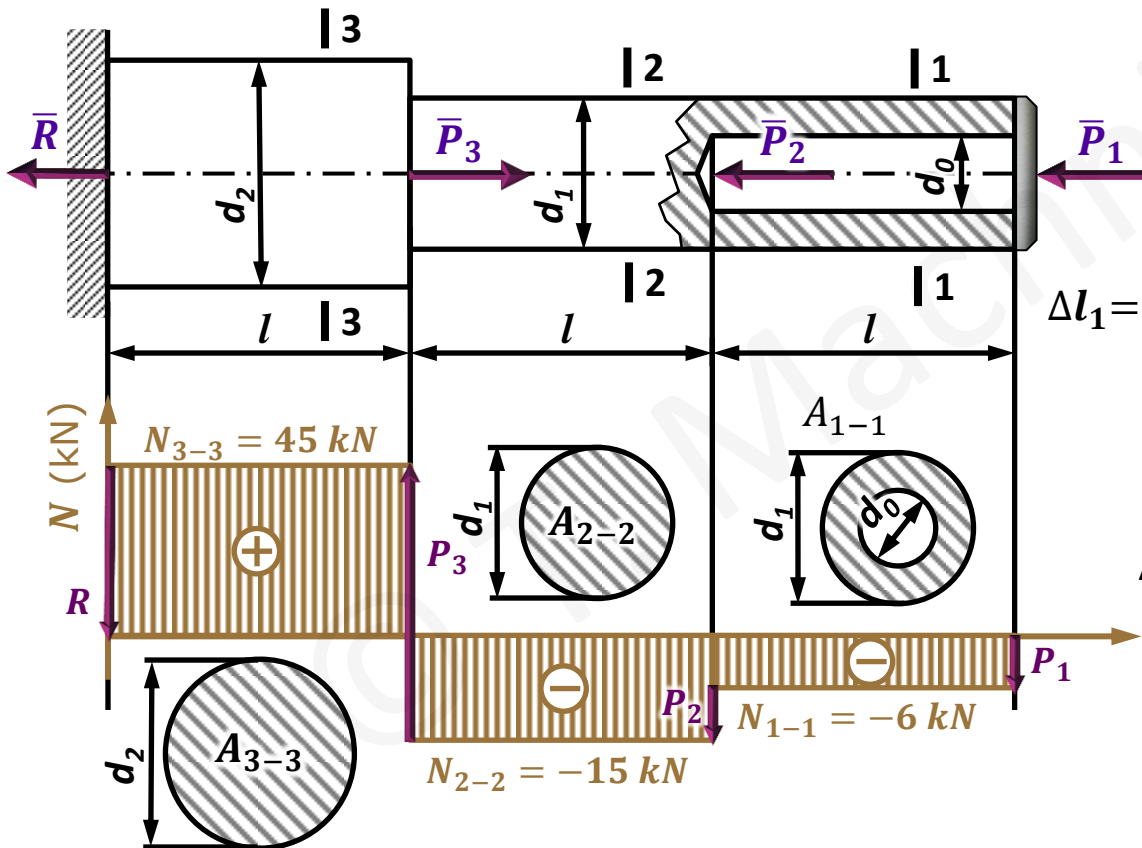
$$P_1=6 \text{ kN}, P_2=9 \text{ kN}, P_3=60 \text{ kN}, E=2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \nu=0.3$$

$$d_1=20 \text{ mm}, d_0=10 \text{ mm}, d_2=30 \text{ mm}, l=400 \text{ mm}$$

Szukane:

$$\sigma_{1-1}, \sigma_{2-2}, \sigma_{3-3} = ???$$

$$\Delta l_c = ?, d_2' = ?$$



$$\Delta l_c = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_{1-1} \cdot l}{A_{1-1} \cdot E} = \frac{4 \cdot N_{1-1} \cdot l}{\pi(d_1^2 - d_0^2) \cdot E}$$

$$\Delta l_1 = \frac{4 \cdot (-6000) \cdot 400}{\pi(20^2 - 10^2) \cdot 2.1 \cdot 10^5} = -0.0485 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_{2-2} \cdot l}{A_{2-2} \cdot E} = \frac{4 \cdot N_{2-2} \cdot l}{\pi \cdot d_1^2 \cdot E}$$

$$\Delta l_2 = \frac{4 \cdot (-15000) \cdot 400}{\pi \cdot 20^2 \cdot 2.1 \cdot 10^5} = -0.0909 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_{3-3} \cdot l}{A_{3-3} \cdot E} = \frac{4 \cdot N_{3-3} \cdot l}{\pi \cdot d_2^2 \cdot E}$$

$$\Delta l_3 = \frac{4 \cdot 45000 \cdot 400}{\pi \cdot 30^2 \cdot 2.1 \cdot 10^5} = 0.1213 \text{ mm}$$

$$\Delta l_c = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -0.0485 - 0.0909 + 0.1213 = -0.0181 \text{ mm}$$

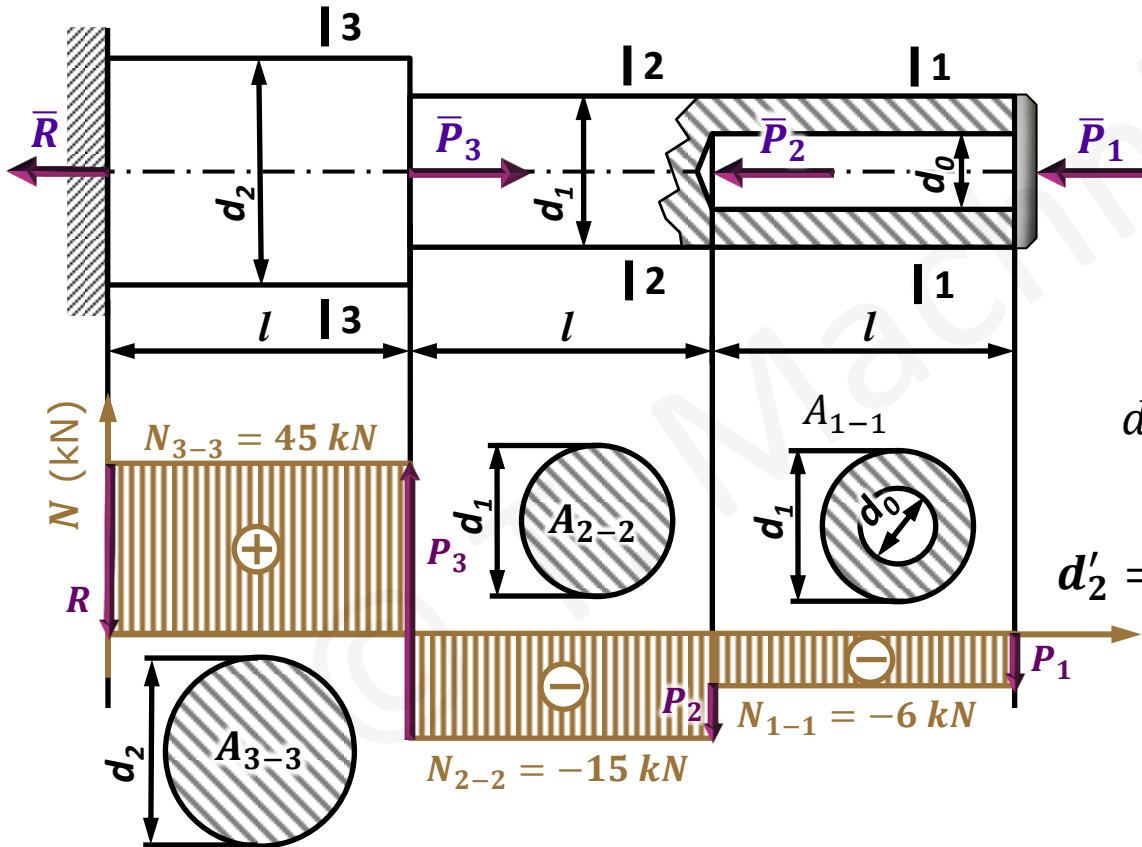
Przykład 5.2:

Dane:

$P_1=6 \text{ kN}$, $P_2=9 \text{ kN}$, $P_3=60 \text{ kN}$, $E=2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\nu=0.3$
 $d_1=20 \text{ mm}$, $d_0=10 \text{ mm}$, $d_2=30 \text{ mm}$, $l=400 \text{ mm}$

Szukane:

σ_{1-1} , σ_{2-2} , $\sigma_{3-3} = ???$
 $\Delta l_c = ?$, $d_2' = ?$



$$\frac{\Delta d_2}{d_2} = \varepsilon_p = -\nu \varepsilon = -\nu \frac{\Delta l_3}{l}$$

$$-\nu \frac{\Delta l_3}{l} d_2 = \Delta d_2 = d_2' - d_2$$

$$d_2' = d_2 - \nu \frac{\Delta l_3}{l} d_2 = d_2 \left(1 - \nu \frac{\Delta l_3}{l} \right)$$

$$d_2' = 30 \left(1 - 0.3 \frac{0.1213}{l} \right) = 29.997 \text{ mm}$$

Przykład 5.3:

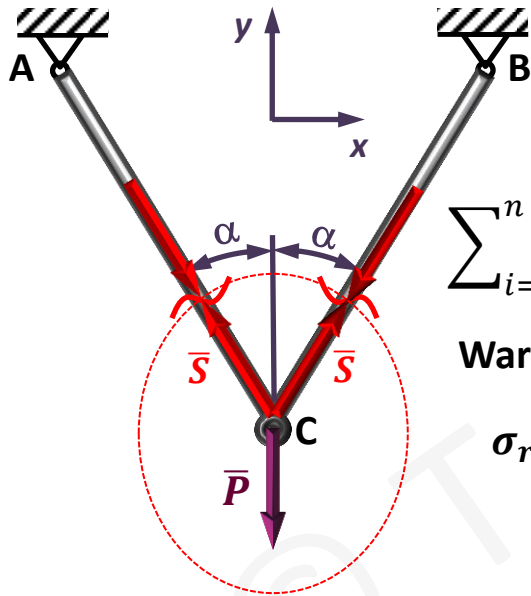
Dobrać średnice prętów konstrukcji jak na rysunku a następnie obliczyć pionowe przemieszczenie punktu C, znając długość początkową prętów l .

Dane:

$$P=21.6 \text{ kN}, k_r=120 \text{ MPa}, \alpha=30^\circ, E=2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}, l=1.2 \text{ m}$$

Szukane:

$$d=?, f_c=?$$



Ze względu na symetrię układu sił (oraz warunek $\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$):

$$S_1=S_2=S \Rightarrow d_1=d_2=d$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \Rightarrow 2S \cos \alpha - P = 0 \Rightarrow S = \frac{P}{2 \cos \alpha} = \frac{21.6}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 12.47 \text{ kN}$$

Warunek bezpieczeństwa:

$$\sigma_r = \frac{N}{A_r} \leq k_r \quad \sigma_r = \frac{4 \cdot S}{\pi \cdot d^2} \leq k_r$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot S}{\pi \cdot k_r}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 12.47 \cdot 10^3}{\pi \cdot 120}} = 11.51 \text{ mm}$$

Przyjmujemy: $d=12 \text{ mm}$

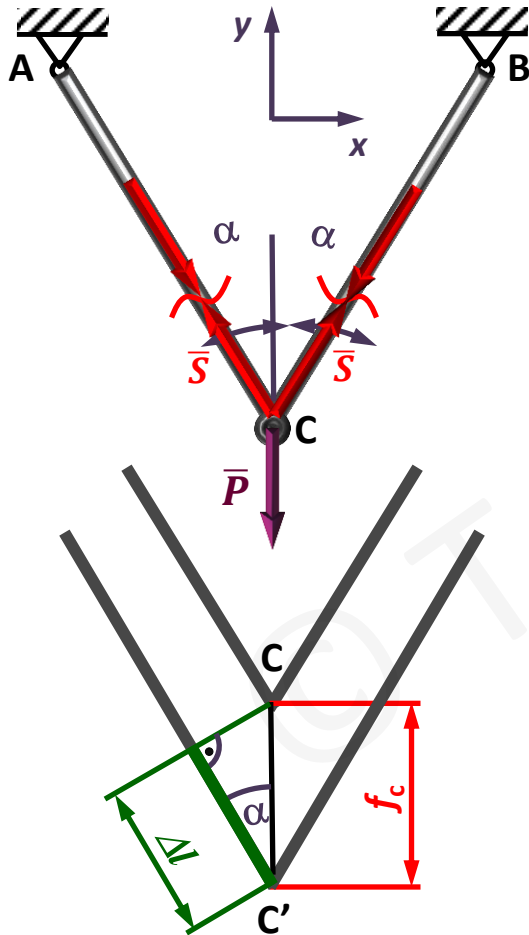
Przykład 5.3:

Dane:

$P=21.6 \text{ kN}$, $k_r=120 \text{ MPa}$, $\alpha=30^\circ$, $E=2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $l=1.2 \text{ m}$

Szukane:

$d=?$, $f_c=?$



$$S = 12.47 \text{ kN}$$

$$d = 12 \text{ mm}$$

$$f_c = \frac{\Delta l}{\cos \alpha}$$

$$\Delta l = \frac{S \cdot l}{A \cdot E} = \frac{4 \cdot S \cdot l}{\pi \cdot d^2 \cdot E}$$

$$f_c = \frac{4 \cdot S \cdot l}{\pi \cdot d^2 \cdot E \cdot \cos \alpha}$$

$$f_c = \frac{4 \cdot 12.47 \cdot 10^3 \cdot 1200}{\pi \cdot 12^2 \cdot 2.1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0.7275 \text{ mm}$$